Zum Tragverhalten gedrungener Stahlbetontragwerke unter Gleichlasten

von Prof. Dr.-Ing. Richard Rojek

1. Allgemeines

Im Folgenden wird in einem Rechenmodell die Bogentragwirkung der Biegetragwirkung gegenübergestellt, indem die Formänderungsarbeiten zur Lastabtragung der beiden Tragmodelle im Zustand I ermittelt und verglichen werden. Die Formänderungsarbeit der inneren Kräfte ist folgendermaßen definiert:

$$W = -\int_s \int_A \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \;\, dA\, ds \qquad (1).$$

Mit $\sigma = E \cdot \varepsilon$,

$\varepsilon = \Delta l \,/\, l = F / (A \cdot E)$

und unter der Annahme konstanter, gleich großer Querschnittsflächen und eines konstanten E-Moduls wird daraus

$$W = \frac{1}{2 \cdot A \cdot E} \cdot \int_s F(s)^2 \, ds \qquad (2),$$

wobei das negative Vorzeichen hier vernachlässigt wurde, da das Vorzeichen bei den hier durchgeführten Untersuchungen keine Rolle spielt.

Für eine über die Länge s konstante Kraft F folgt somit:

$$W = \frac{1}{2 \cdot A \cdot E} \cdot F^2 \cdot l \qquad (3).$$

2. Modell für die Bogentragwirkung mit Zugband

Das Tragmodell und die Bezeichnungen können *Bild 1* entnommen werden. Damit ergeben sich für die Kräfte folgende Zusammenhänge:

$$T_{Bogen} = C_{min,Bogen} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot z} \qquad (4).$$

Mit $$n = \frac{l}{z} \qquad (5)$$

folgt: $$T_{Bogen} = C_{min,Bogen} = \frac{q \cdot n \cdot l}{8} \qquad (6).$$

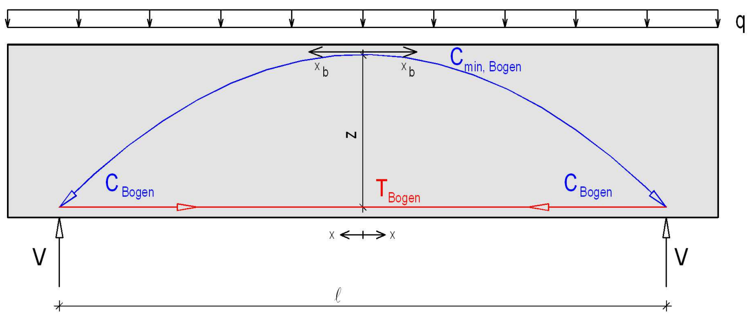

Bild 1: Bogentragwirkung mit Zugband

Für die Länge des Zugbandes gilt:

$$l_{T,Bogen} = l \qquad (7).$$

Entsprechend *Glg. (3)* folgt für die Formänderungsarbeit der konstanten Zugkraft T_{Bogen}:

$$W_{T,Bogen} = \frac{1}{2 \cdot A \cdot E} \cdot T_{Bogen}^2 \cdot l_{T,Bogen} \qquad (8).$$

Für die Querschnittsfläche des Zugbands im Zustand I wird angenommen:

$$A = b_w \cdot \frac{h}{4} \quad \text{mit} \quad b_w = \text{Stegbreite}, \quad \frac{h}{4} = \text{Druckzonenhöhe} \qquad (9).$$

Mit $z = \frac{2}{3} \cdot h$

folgt $A = \frac{3}{8} \cdot b_w \cdot z \qquad (10).$

Bei Ansatz der Querschnittsfläche des Zugbands A nach *Glg. (10)* und Einsetzen der *Glg. (6)* sowie *(7)* wird daraus:

$$W_{T,Bogen} = \frac{4}{3 \cdot b_w \cdot z \cdot E} \cdot \left(\frac{q \cdot n \cdot l}{8} \right)^2 \cdot l = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \frac{1}{48} \cdot n^3 \qquad (11).$$

Die Länge des Druckbogens entspricht der Länge einer Parabel mit dem Stich z und der Sehnenlänge λ. Mit *Glg. (5)* ergibt sich die Parabellänge $\lambda_{C,Bogen}$ zu

$$l_{C,Bogen} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + 4 \cdot \frac{l^2}{n^2}} + \frac{l}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdot \ln \left(\frac{4}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{n} \right)^2} \right) \qquad (12),$$

und damit zu

$$l_{C,Bogen} = \frac{l}{2} \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}\right)\right] \tag{13}$$

Die Bogendruckkraft C_{Bogen} setzt sich zusammen aus einem konstanten horizontalen Anteil $C_{min,Bogen}$ und einem linear verlaufenden vertikalen Anteil C_v. Dieser vertikale Anteil entspricht der Querkraft und steigt von $C_v = 0$ in Feldmitte linear auf $C_v = \frac{q \cdot l}{2}$ am Auflager an. Die Formel dieses Anteils ist somit linear vom horizontal verlaufenden x abhängig und kann bei Betrachtung des halben Systems, ausgehend von der Feldmitte, ausgedrückt werden durch:

$$C_v(x) = q \cdot x \tag{14}$$

Bei der Berechnung der Formänderungsarbeit muss jedoch über die Bogenlänge der Parabel integriert werden, so dass die Kraft C_{Bogen} abhängig vom Weg auf dem Parabelbogen x_b angegeben werden muss. Der Verlauf des vertikalen Lastanteils $C_v(x_b)$, abhängig vom Weg auf dem Parabelbogen, ist nicht mehr linear. Da die Umrechnung mathematisch jedoch sehr aufwendig ist und sich bei den im Stahlbetonbau üblichen Trägern sehr flache Parabeln einstellen, wird näherungsweise davon ausgegangen, dass der Lastanteil $C_v(x_b)$ auch auf dem Parabelbogen linear zunimmt. Als Gleichung für diesen Anteil folgt somit näherungsweise:

$$C_v(x_b) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x_b}{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}\right)\right]} \tag{15}$$

Damit kann die Bogendruckkraft ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned} C_{Bogen}(x_b) &= \sqrt{C_{min,Bogen}^2 + C_v(x_b)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{q \cdot n \cdot l}{8}\right)^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{x_b}{\frac{l}{4} \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}\right)\right]}\right)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Für die Formänderungsarbeit der Bogendruckkraft am Gesamtsystem ergibt sich somit, bei Ansatz der Strebenfläche nach *Glg. (10)*,

$$W_{C,Bogen} = 2 \cdot \frac{4}{3 \cdot b_w \cdot z \cdot E} \cdot \int_0^{\frac{l}{4} \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}\right)\right]} C_{Bogen}(x_b)^2 \, dx_b \tag{17}$$

Mit *Glg. (16)* wird daraus durch Integration und Umformung:

$$W_{C,Bogen} = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \frac{n}{6} \cdot \left[\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\right] \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}\right)\right] \tag{18}$$

Die gesamte **Formänderungsarbeit der Bogentragwirkung** ergibt sich aus den *Gln. (11)* und *(18)* und ist, unter der Annahme gleicher, linearelastischer Dehnsteifigkeiten im Zustand I:

$$\begin{aligned} W_{Bogen} &= W_{T,Bogen} + W_{C,Bogen} \\ &= \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \left[\frac{1}{48} \cdot n^3 + \frac{n}{6} \cdot \left[\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \right] \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} + \frac{n}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{n} + \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (19).$$

3. Modell für die Biegetragwirkung

Das Tragmodell des Biegeträgers kann *Bild 2* entnommen werden. Der Biegeträger wird dabei in zwei Endauflagerbereiche, D_e-Bereiche, und einen dazwischen liegenden Biegebereich, B-Bereich, untergliedert.

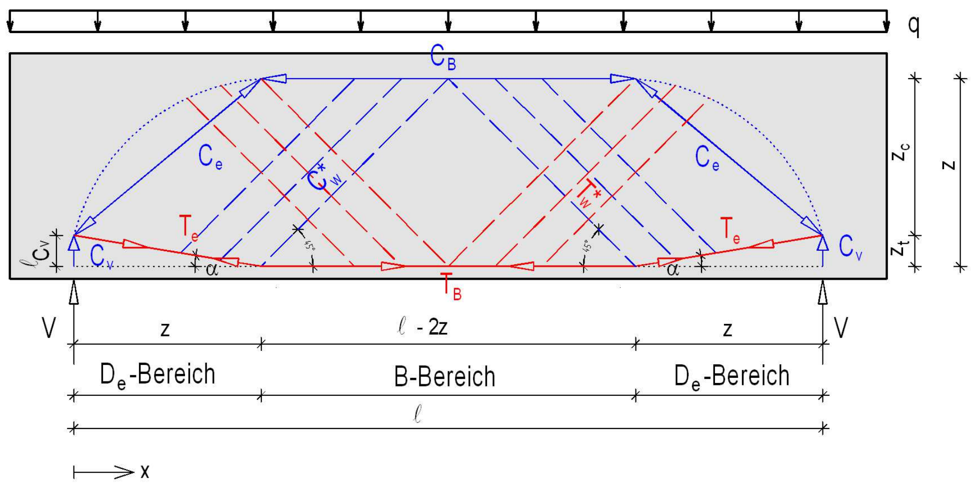

Bild 2: Verwendetes Modell für die Biegetragfähigkeit

Für den **D_e-Bereich** gilt mit der Annahme $\tan\alpha = 3/8$ - vgl. hierzu [1] - und $\max V = q \cdot \lambda / 2$ näherungsweise:

$$T_e = V \cdot \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{q \cdot l}{16} \cdot \sqrt{73} \quad (20)$$

$$C_e = V \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \tan\alpha + \tan^2\alpha} = \frac{q \cdot l}{16} \cdot \sqrt{89} \quad (21)$$

$$C_v = V = \frac{q \cdot l}{2} \quad (22)$$

$$l_{Te} = z \cdot \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{z}{8} \cdot \sqrt{73} \quad (23)$$

$$l_{Ce} = z \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \tan\alpha + \tan^2\alpha} = \frac{z}{8} \cdot \sqrt{89} \qquad (24)$$

$$l_{Cv} = z \cdot \tan\alpha = \frac{3}{8} \cdot z \qquad (25).$$

Die genaue Wirkung der Auflast im D_e-Bereich wird hier nicht näher betrachtet. Indirekt ist ihre Wirkung im Ansatz der Auflagerkraft zur Berechnung der Strebenkräfte enthalten. Mit den *Gln. (21)*, *(22)*, *(23)*, *(24)* und *(25)* sowie Ansatz der Strebenflächen nach *Glg. (10)* wird die Formänderungsarbeit in den D_e-Bereichen, wiederum unter der Annahme gleicher, linearelastischer Dehnsteifigkeiten im Zustand I, entsprechend *Glg. (3)* zu:

$$W_{D_e-\text{Bereiche}} = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \left[\frac{73 \cdot \sqrt{73}}{768} + \frac{89 \cdot \sqrt{89}}{768} + \frac{1}{4} \right] \qquad (26).$$

Im **B-Bereich** liegt auf Grund der Gleichlast ein parabelförmiger Momentenverlauf vor. Die Gurtkräfte aus der Biegung verlaufen somit auch parabelförmig und werden in Feldmitte zu

$$T_{B,Feld} = C_{B,Feld} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot z} \qquad (27).$$

Bei Betrachtung des halben Systems kann auf Grund des parabolischen Verlaufs für die Gurtkräfte T_B und C_B folgende Gleichung eingeführt werden:

$$T_B(x) = C_B(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C \qquad (28)$$

und weiter:

$$\frac{dT_B(x)}{dx} = \frac{dC_B(x)}{dx} = 2 \cdot A \cdot x + B \qquad (29),$$

wobei hier x die Laufvariable ausgehend vom Auflager ist (siehe auch *Bild 2*).

Diese Gleichung muss folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\frac{dT_B\left(\frac{l}{2}\right)}{dx} = \frac{dC_B\left(\frac{l}{2}\right)}{dx} = 0 \qquad (30),$$

$$T_B(0) = C_B(0) = 0 \qquad (31),$$

und $$T_B\left(\frac{l}{2}\right) = C_B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot z} \qquad (32).$$

Aus Glg. (30) folgt $B = -A \cdot l$ (33),

aus Glg. (31) $C = 0$ (34).

Damit folgt aus *Glg. (32)* $A = -\dfrac{q}{2 \cdot z}$ (35), und somit aus *Glg. (33)* $$B = \frac{q \cdot l}{2 \cdot z} \quad (36).$$

Glg. (28) lautet dann:

$$T_B(x) = C_B(x) = -\frac{q}{2 \cdot z} \cdot x^2 + \frac{q \cdot l}{2 \cdot z} \cdot x \quad (37).$$

Die Formänderungsarbeit des Biegezug- bzw. des Biegedruckgurts beträgt also, wiederum unter Ansatz der Gurtflächen entsprechend *Glg. (10)*:

$$W_{TB} = W_{CB} = 2 \cdot \frac{4}{3 \cdot b_w \cdot z \cdot E} \cdot \int_z^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{q}{2 \cdot z} \cdot x^2 + \frac{q \cdot l}{2 \cdot z} \cdot x \right)^2 dx \quad (38).$$

Daraus wird durch Integration, Umformung und Einarbeitung der *Glg. (5)*:

$$W_{TB} = W_{CB} = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \left(\frac{n^3}{90} - \frac{2}{15 \cdot n^2} + \frac{1}{3 \cdot n} - \frac{2}{9} \right) \quad (39).$$

Für die Berechnung der Formänderungsarbeit aus der Stegbeanspruchung infolge der Momentengradienten wird das Modell der schrägen Zug- und Druckstreben gemäß *Bild 2* verwendet. Diese sind direkt von der linear veränderlichen Querkraft abhängig, welche durch die Formel ausgedrückt werden kann:

$$V(x) = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x \quad (40).$$

Bei Annahme einer Zug- und Druckstrebenneigung von 45 °, d. h., es wird eine gleichmäßige Aufteilung der Querkraft in schräge Zug- und schräge Druckstreben angenommen, und Umrechnung auf „laufende Meter“ mit dem Faktor $1 / z$ folgt somit:

$$T_w^*(x) = C_w^*(x) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot z} \cdot \left(\frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x \right) = \frac{q \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot z} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (41).$$

Die Länge der schrägen Zug- und Druckstreben betragen bei der angenommenen Neigung von 45 °

$$l_{Tw^*} = l_{Cw^*} = \sqrt{2} \cdot z \quad (42).$$

Auf dieser Länge ist die Kraft, die auf ihr Arbeit leistet, konstant. Da die schrägen Zug- bzw. Druckkräfte jedoch auf den „laufenden Meter“ bezogen sind, muss über die Wirkungslänge integriert werden.

Die Wirkungsfläche A_{Steg} der Streben ist bei Ansatz einer Neigung von 45 °

$$A_{Steg} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot b_w \quad (43).$$

Für die Formänderungsarbeit gilt dann, analog *Glg. (2)*,

$$W_{Tw^*} = W_{Cw^*} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b_w \cdot E} \cdot \int_z^{\frac{l}{2}} \left[\frac{q \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot z} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]^2 \cdot \sqrt{2} \cdot z \, dx \quad (44).$$

Durch Integration, Umformung und Einarbeitung der *Glg. (5)* wird daraus:

$$W_{Tw^*} = W_{Cw^*} = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \left(\frac{n}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{3 \cdot n^2} \right) \qquad (45).$$

Damit ergibt sich für die **Formänderungsarbeit bei Biegetragwirkung** unter der Voraussetzung, dass - im Zustand I - gleiche, linearelastische Dehnsteifigkeiten vorliegen:

$$W_{Biegung} = W_{D_e-Bereiche} + W_{TB} + W_{CB} + W_{Tw^*} + W_{Cw^*} \qquad (46).$$

Mit den *Gln. (26)*, *(39)* und *(45)* erhält man zusammengefasst:

$$W_{Biegung} = \frac{q^2 \cdot l^2}{b_w \cdot E} \cdot \left[\frac{73 \cdot \sqrt{73} + 89 \cdot \sqrt{89} - 192}{768} - \frac{4}{9} + \frac{n^3}{45} + \frac{n}{12} + \frac{5}{3 \cdot n} - \frac{14}{15 \cdot n^2} \right] \qquad (47).$$

4. Minimum der Formänderungsarbeit

Die erforderlichen Formänderungsarbeiten zum Lastabtrag werden nun mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms gegenübergestellt. Dazu werden die erforderlichen Formänderungsarbeiten abhängig von $n = \lambda / z$ in den *Bildern 3* und *4* aufgetragen. Da es nur um einen qualitativen Vergleich der Arbeiten geht, bleibt der bei beiden Termen gleiche Faktor $q^2 \cdot l^2 / b_w \cdot E$ unberücksichtigt.

Wie aus den *Bildern 3* und *4* ersichtlich ist, wird die erforderliche Formänderungsarbeit bei Bogentragwirkung ab ca. $n = 4$ größer als die für Biegetragwirkung erforderliche. Im Grenzbereich der größten praktisch vorkommenden Schlankheiten erfordert die Bogentragwirkung etwa doppelt soviel Formänderungsarbeit als die Biegetragwirkung, umgekehrt bei $n = 2$.

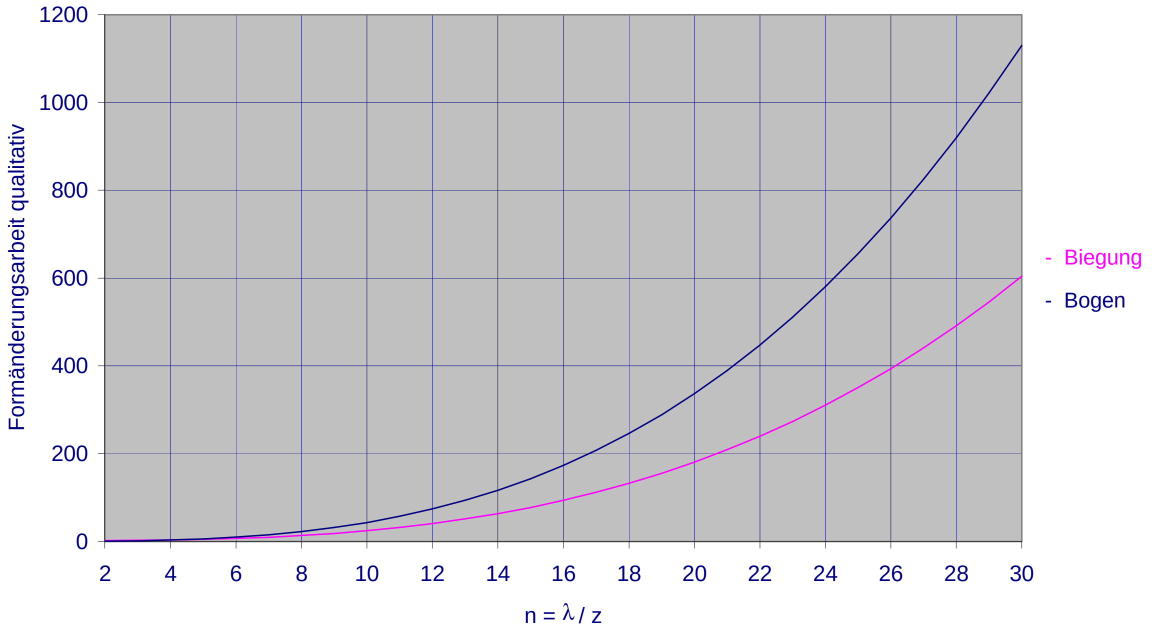

Bild 3: Formänderungsarbeiten qualitativ für n = 2 bis 30

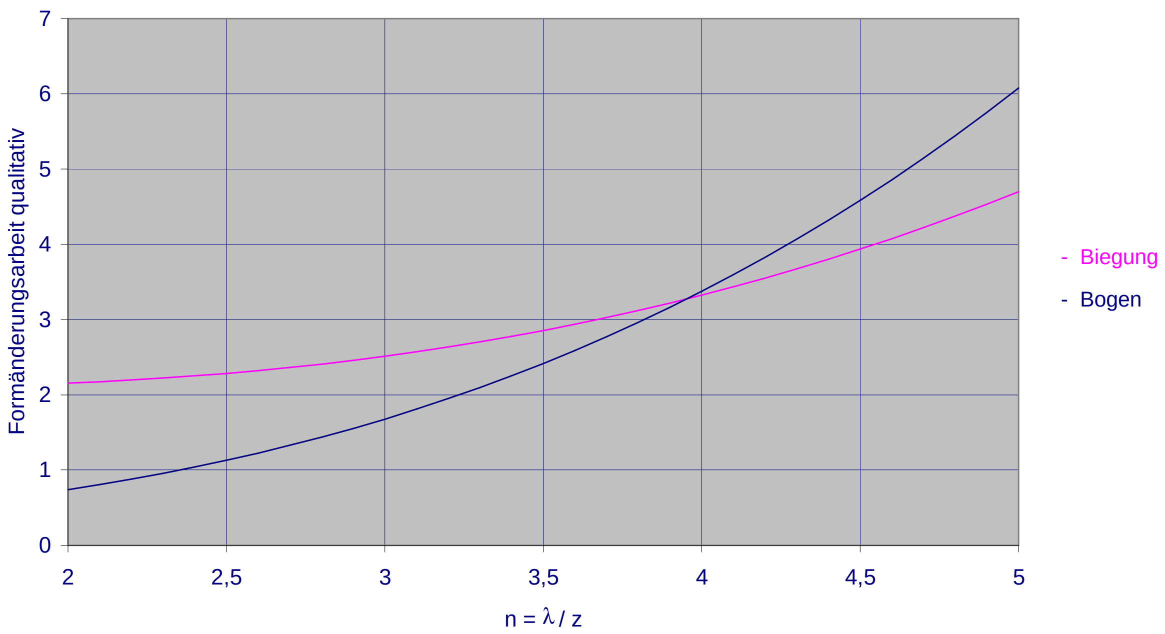

Bild 4: Formänderungsarbeiten qualitativ für n = 2 bis 5

Im Folgenden wird nun angenommen, dass sich eine Mischform aus beiden Tragmodellen einstellen wird, um ein Minimum an Formänderungsarbeit zu erreichen. Es wird der Faktor β eingeführt, der den Anteil der Last angibt, der über Biegetragwirkung abgetragen wird.

Also: $F_{Biegung} = \beta \cdot F_{Gesamt}$ (48).

Damit ist der über Bogentragwirkung abzutragende Anteil:

$$F_{Bogen} = (1-\beta) \cdot F_{Gesamt} \qquad (49).$$

Wie bereits oben geschildert, geht die Kraft bei der Berechnung der Formänderungsarbeiten quadratisch ein, vgl. *Glg. (2)* bzw. *(3)*, so dass gilt:

$$W = \beta^2 \cdot W_{Biegung} + (1-\beta)^2 \cdot W_{Bogen} \qquad (50).$$

Das Minimum der Formänderungsarbeit wird erreicht für $dW / d\beta = 0$.

Mit $$\frac{dW}{d\beta} = 2 \cdot \beta \cdot W_{Biegung} - 2 \cdot W_{Bogen} + 2 \cdot \beta \cdot W_{Bogen} = 0 \qquad (51)$$

folgt also, dass sich das Minimum der Formänderungsarbeit ergibt für:

$$\beta = \frac{2 \cdot W_{Bogen}}{2 \cdot W_{Biegung} + 2 \cdot W_{Bogen}} = \frac{W_{Bogen}}{W_{Biegung} + W_{Bogen}} \qquad (52).$$

Das Ergebnis der Auswertung dieser Formel mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ist in *Bild 5* dargestellt. Hier ist der über Bogentragwirkung abzutragende Anteil der Gesamtlast, dies entspricht der Funktion $(1 - \beta)$, für $n = 2$ bis $n = 30$ aufgezeigt. Es zeigt sich, dass dieser Lastanteil von $n = 2$ bis $n = 12$ von ca. 75 % auf 35 % abfällt. Bei größeren Werten von n stellt sich nach dem hier verwendeten Rechenmodell ein annähernd konstanter Verlauf bei ca. 0,35 ein, was bedeuten würde, dass bei Schlankheiten $n = \lambda / z$ größer 12 immer ca. 35 % der Last über Bogentragwirkung abgetragen werden. Dieses analytisch ermittelte Ergebnis ist jedoch praktisch eher unwahrscheinlich, da sich die hier zu Grunde gelegten Tragwirkungen durch den Übergang des Tragwerks in den Zustand II so nicht mehr einstellen können.

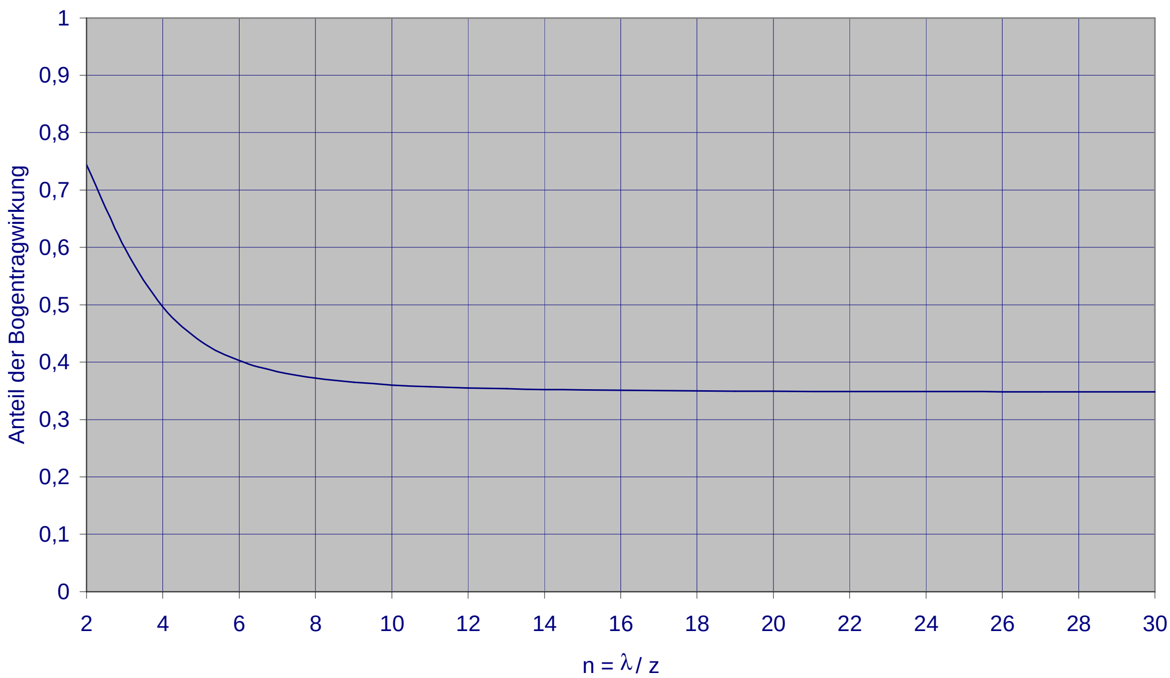

Bild 5: Anteil der Bogentragwirkung zum Lastabtrag (Funktion $(1 - \beta)$)

5. Vergleichende FE-Berechnungen

Im Weiteren sind die Hauptspannungsverläufe aus FE-Berechnungen an gedrungenen Stahlbetonbalken unterschiedlicher Länge dargestellt, die sehr anschaulich die Bogentragwirkung bei kurzen Balken wiedergeben. In den *Bildern 6* bis *10* sind die Hauptspannungen von Einfeldträgern unter Gleichlast für die Fälle n = 2 bis n = 5 sowie n = 10 dargestellt. In diesen Bildern ist zusätzlich zur Darstellung der Hauptspannungen jeweils mit einer gestrichelten Linie die zugehörige quadratische Parabel abgebildet, die die Achse des Bogens repräsentiert für überlagerte Teiltragsysteme, die aus einem Bogen mit Zugband bestehen.

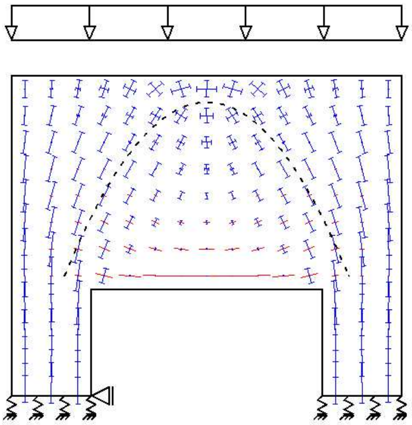

Bild 6: Hauptspannungsverteilung unter Gleichlast bei einem Balken mit n = 2

Man sieht sehr deutlich, dass bei dem System mit n = 2 die Drucktrajektorien praktisch vollständig der Parabel folgen. (Entsprechend sind nach [2] Balken mit n ≤ 2 als Scheiben zu bemessen, aber alle mit n > 2 als Balken oder Platten mit gleich bleibender Querkrafttragfähigkeit.)

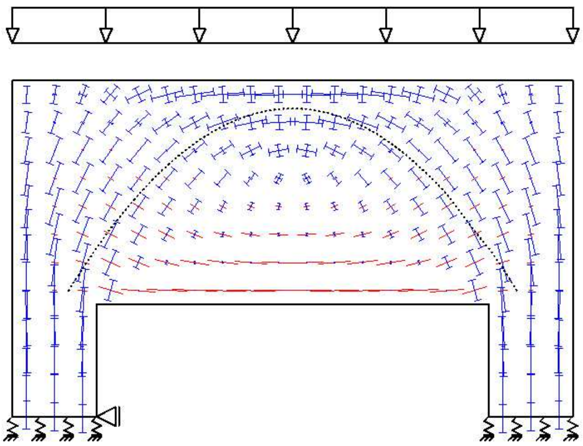

Bild 7: Hauptspannungsverteilung unter Gleichlast bei einem Balken mit n = 3

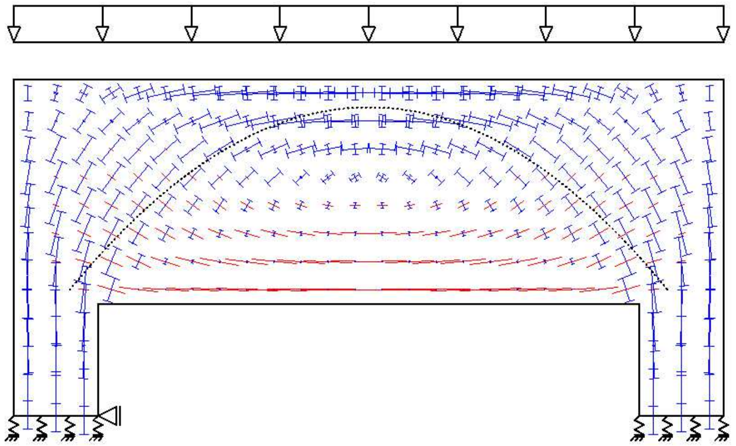

Bild 8: Hauptspannungsverteilung unter Gleichlast bei einem Balken mit n = 4

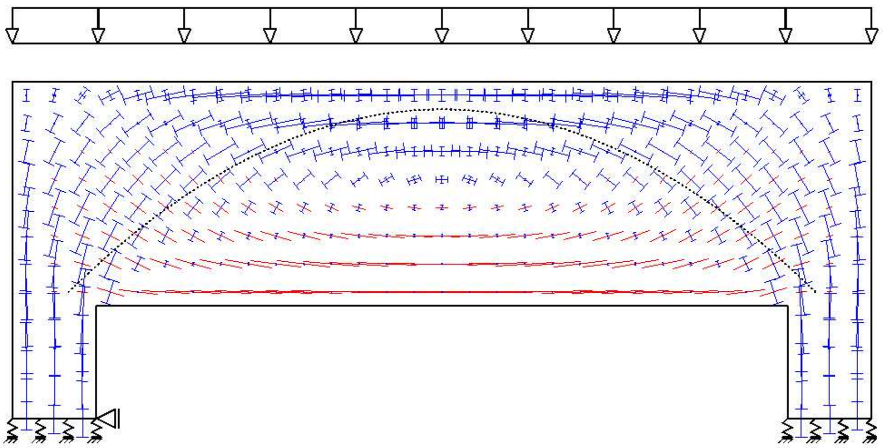

Bild 9: Hauptspannungsverteilung unter Gleichlast bei einem Balken mit n = 5

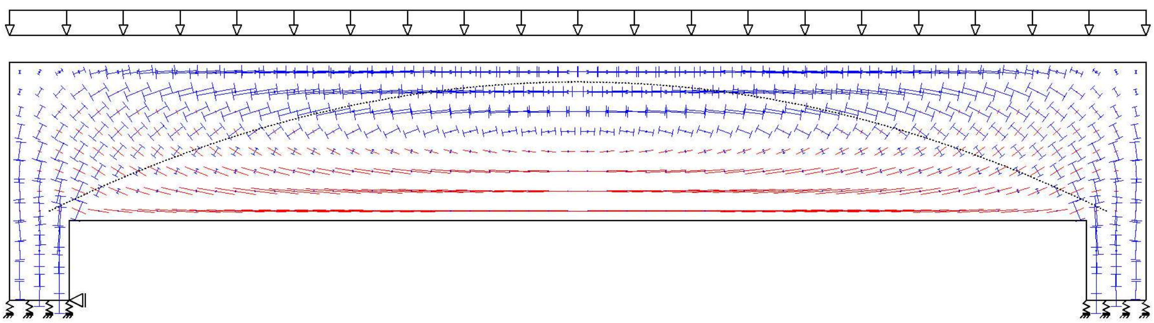

Bild 10: Hauptspannungsverteilung unter Gleichlast bei einem Balken mit n = 10

Mit zunehmenden Werten von n wird die Übereinstimmung der Drucktrajektorienrichtungen mit dem Bogen auf immer kleiner werdende Bereiche begrenzt. Schließlich ist erwartungsgemäß bei n = 10 kaum noch eine Übereinstimmung der Hauptspannungsverteilung mit dem Druckgewölbe erkennbar. Das Teilergebnis nach dem zuvor verwendeten Rechenmodell, nach dem auch bei großen Schlankheiten noch etwa 35 % der Lasten über ein Gewölbe mit Zugband abgetragen werden, ist in dieser Darstellung kaum nachvollziehbar.

6. Vergleich mit Versuchsergebnissen

Es stellt sich nun natürlich die interessante Frage, in wie fern das hier vorgestellte Rechenmodell über die anteilige Bogentragwirkung im Zustand I mit dokumentierten Versuchsergebnisse übereinstimmt. Zur Beantwortung dieser Frage sind in der folgenden Tabelle die maximal erreichten Querkräfte der von *Leonhardt* und *Walther* in [3 vorgestellten Versuchsbalken 11/1 bis 17/1 zusammengestellt. Da die Werte miteinander verglichen werden sollen, wurden die von den Verfassern in [3 in eine einheitliche Beton-Bezugsfestigkeit umgerechneten Werte verwendet. Die Tabelle enthält die maximalen Querkräfte für die Stelle x = 0. Es ist jedoch zu beachten, dass es sich hierbei um die erreichten Bruchquerkräfte im Zustand II handelt, wo hingegen das vorgestellte Rechenmodell für den Zustand I gilt. Ein direkter Vergleich ist daher nur eingeschränkt möglich; für eine qualitative Aussage über die Tendenz des hergeleiteten Rechenmodells sind die Versuchsergebnisse jedoch geeignet.

Tabelle 1: Versuchsergebnisse der Balken 11/1 bis 17/1 aus [3

Balken Nr.	λ [m]	λ / d	λ / z	$V_{u,x=0}$ [kN]	$V_{u,x=0}$ / $V_{u,x=0}$(16/1)
11/1	1,50	5,2	5,8	229,50	2,59
12/1	2,00	7,4	8,2	170,00	1,92
13/1	2,50	9,3	10,3	129,30	1,46
14/1	3,00	11,1	12,3	101,00	1,14
15/1	4,00	14,8	16,5	90,40	1,02
16/1	5,00	18,5	20,6	88,70	1,00
17/1	6,00	22,2	24,7	83,10	0,94

Man sieht in der Tabelle auf den ersten Blick, dass die Bruchquerkraft mit abnehmender Schlankheit immer größer wird. In der ganz rechten Spalte wurden die erreichten Bruchquerkräfte in Relation gesetzt zur Bruchquerkraft des Balkens 16/1, wodurch die Veränderlichkeit des Wertes noch deutlicher wird. (Als Bezugswert wurde der Balken 16/1 und nicht der Balken 17/1 gewählt, weil letzterer schon sehr stark vom Biegeversagen beeinflusst war). Die Bruchquerkraft des kürzesten Balkens war also etwa 2,6 Mal so groß als bei den schlanken Balken.

Die Abhängigkeit der erreichten Bruchquerkräfte von der Schlankheit ist besonders anschaulich in dem im *Bild 11* dargestellten Diagramm abzulesen.

Vergleicht man nun diesen Verlauf mit dem Ergebnis des Rechenmodells für die anteilige Bogentragwirkung im Zustand I, das im *Bild 5* wiedergegeben wurde, so erkennt man sofort einen sehr ähnlichen Verlauf. Insbesondere ist festzustellen, dass in beiden Fällen übereinstimmend der mit zunehmender Schlankheit abfallende Wert bei etwa λ / d = 12 (entspricht ca. λ / z = 13) den asymptotischen Grenzwert erreicht.

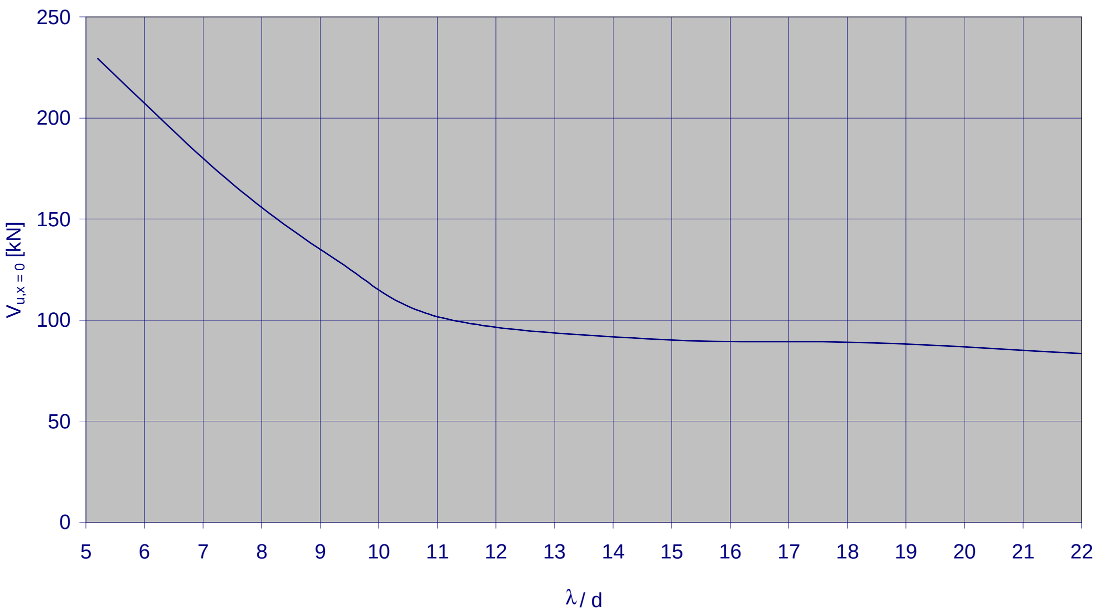

Bild 11: Bruchquerkräfte nach *Tab. 1* an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit von der Schlankheit

Die Übereinstimmung geht allerdings nicht so weit, dass aus dem Rechenmodell für die anteilige Bogentragwirkung im Zustand I tatsächlich die gemessenen Grenztragfähigkeiten im Zustand II bestimmt werden könnten. So ergibt sich für den kürzesten Träger mit der Schlankheit von 5,6 (entspricht $\lambda / z = 6{,}2$) nach *Bild 5* für den Zustand I der Anteil der Bogentragwirkung zu etwa 40 %. Daraus könnte man ableiten, dass die Querkrafttragfähigkeit um

$$\frac{1}{1-0{,}40} = 1{,}67 \tag{53}$$

größer sein müsste als bei schlanken Tragwerken. Tatsächlich liegt jedoch der gemessene Erhöhungsfaktor bei 2,6. Dies liegt darin begründet, dass gedrungene Balken auch bezüglich der Biegetragwirkung günstigere Verhältnisse aufweisen als schlanke Tragwerke, wie in [1] gezeigt wird.

Aus den in der *Tabelle 1* zusammengestellten Versuchsergebnissen kann näherungsweise folgende Funktion vorgeschlagen werden, die die erhöhte Querkrafttragfähigkeit, bezogen auf die Querkraft an der Stelle $x = 0$, für Stahlbetontragwerke mit Rechteckquerschnitten und ohne Stegbewehrung bei Schlankheiten bis zu $\lambda / d = 10$ gegenüber schlanken Tragwerken wie folgt beschreibt:

$$V_{Rd,ct,x=0}\left(\frac{l}{d}\right) = V_{Rd,ct,x=0} \cdot \left[4{,}3 - 0{,}33 \cdot \left(\frac{l}{d}\right)\right] \qquad \text{für} \qquad 2 \leq \left(\frac{l}{d}\right) \leq 10 \tag{54}$$

Diese genäherte Funktion ist im *Bild 12* grafisch den zu Grunde liegenden Messwerten gegenüber gestellt.

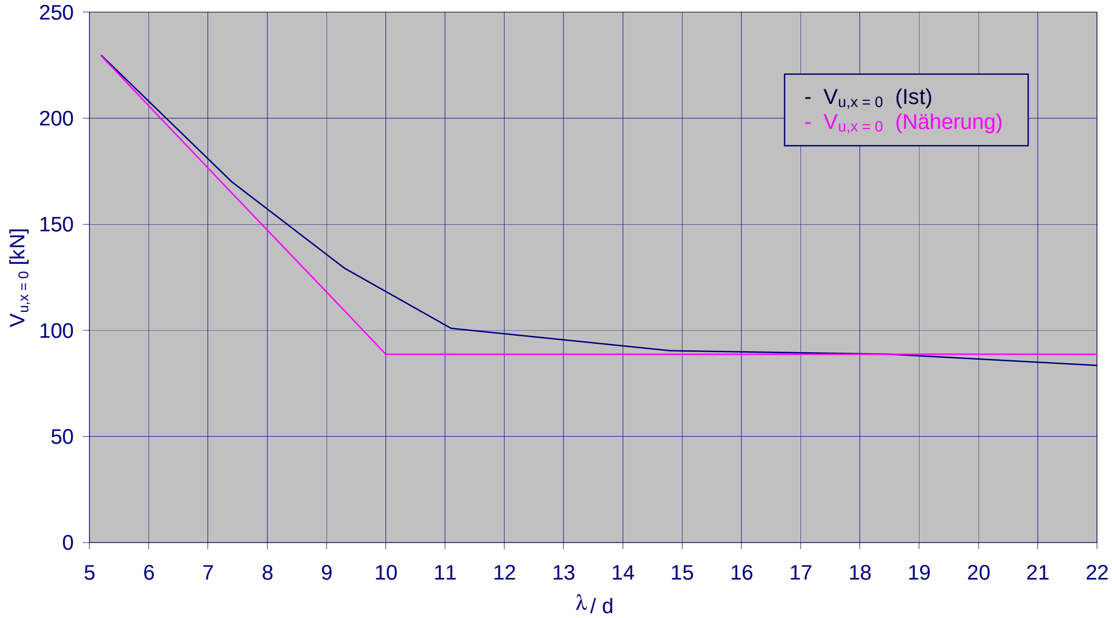

Bild 12: Gemessene Bruchquerkräfte und bilineare Näherungsfunktion für die Querkraft an der Stelle $x = 0$

Alles in Allem erlaubt der Vergleich der Versuchsergebnisse mit dem für den Zustand I auf der Grundlage des Minimums der Formänderungsarbeit entwickelten Rechenmodell den Schluss, dass das Modell die Wirklichkeit qualitativ auch für den Zustand II ganz gut abbildet.

Die hier vorgeschlagene Näherungsfunktion gilt jedoch nur für die Querkräfte an der Stelle $x = 0$. Für die Querkräfte an einer anderen Stelle müssten bei Bedarf eigene Näherungsfunktionen ermittelt werden, da an einer bestimmten Stelle, zum Beispiel $x = 2{,}6 \cdot d$, die Querkräfte auf Grund des stark unterschiedlich steilen Querkraftverlaufs nicht mehr im gleichen Verhältnis stehen wie an der Stelle $x = 0$. So ist zum Beispiel das Verhältnis der Querkräfte an der Stelle $x = 2{,}6 \cdot d$, dies entspricht der Feldmitte des Balkens 11/1, vom Balken 11/1 zum Balken 16/1:

$$\frac{V_{u,x=2,6\cdot d}(11/1)}{V_{u,x=2,6\cdot d}(16/1)} = \frac{0}{64} = 0\,.$$

Dies entspricht offensichtlich nicht dem Verhältnis an der Stelle $x = 0$, das, wie der *Tabelle 1* zu entnehmen ist, den Wert 2,59 aufweist.

Da im Stahlbetonbau in der Regel die Querkraftbemessung im Abstand d vom Auflagerrand durchgeführt wird, wird im Folgenden auch eine Näherungsfunktion für die Erhöhung der Querkrafttragfähigkeit gedrungener Balken mit Rechteckquerschnitt und ohne Stegbewehrung an der Stelle $x = d$ vorgeschlagen. In *Tabelle 2* sind analog zur *Tabelle 1* die Bruchquerkräfte an der Stelle $x = d$ dargestellt, die sich aus den von den Verfassern in [3 in eine einheitliche Beton-Bezugsfestigkeit umgerechneten Werten ergeben.

Tabelle 2: Versuchsergebnisse der Balken 11/1 bis 17/1 aus [3
für die Bemessungsquerkräfte im Abstand d vom Auflagerrand

Balken Nr.	λ [m]	λ / d	λ / z	$V_{u,x=d}$ [kN]	$V_{u,x=d}$ / $V_{u,x=d}$(16/1)
11/1	1,50	5,2	5,8	125,67	1,62
12/1	2,00	7,4	8,2	115,60	1,49
13/1	2,50	9,3	10,3	96,26	1,24
14/1	3,00	11,1	12,3	79,53	1,03
15/1	4,00	14,8	16,5	75,94	0,98
16/1	5,00	18,5	20,6	77,39	1,00
17/1	6,00	22,2	24,7	74,24	0,96

Aus diesen Versuchsergebnissen wird folgende Näherungsfunktion für die Erhöhung der Querkrafttragfähigkeit an der Stelle x = d von Stahlbetontragwerken mit Rechteckquerschnitt und ohne Stegbewehrung bei Schlankheiten bis λ / d = 10 abgeleitet:

$$V_{Rd,ct,x=d}\left(\frac{l}{d}\right) = V_{Rd,ct,x=d} \cdot \left[2{,}5 - 0{,}15 \cdot \left(\frac{l}{d}\right)\right] \qquad \text{für} \qquad 2 \leq \left(\frac{l}{d}\right) \leq 10 \qquad (55).$$

Diese genäherte bilineare Funktion ist im *Bild 13* ebenfalls grafisch den zu Grunde liegenden Versuchsergebnissen gegenüber gestellt.

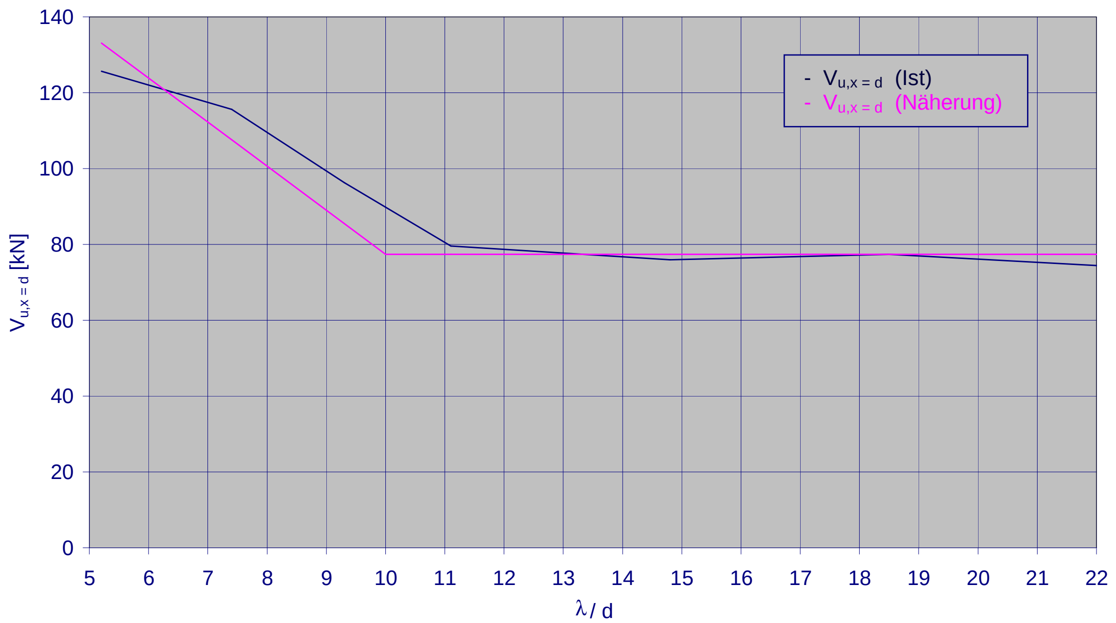

Bild 13: Gemessene Bruchquerkräfte und bilineare Näherungsfunktion
für die Bemessungsquerkräfte im Abstand d vom Auflagerrand

7. Zusammenfassung

Bei Stahlbetonbalken mit Schlankheiten $n < 10$ bestätigen die hier durchgeführten Untersuchungen analytisch und numerisch, dass bei solch gedrungenen Stahlbetontragwerken unter Gleichlast ein nicht unerheblicher Anteil der Last (bis zu 75 %) über Bogentragwirkung mit Zugband abgetragen wird. Diese Bogentragwirkung führt bezüglich der Querkrafttragfähigkeit zu einer erheblich günstigeren Beanspruchung für Betontragwerke, da Riss auslösende Stegzugkräfte hier rein theoretisch nicht auftreten. Allerdings bedeutet dies auf der anderen Seite auch, dass die Zuggurte solcher Tragwerke in der Nähe der Auflager wesentlich stärker beansprucht werden, als dies nach der Biegetheorie - auch einschließlich der aus der Fachwerkanalogie resultierenden Versatzmaße - ermittelt wird. Dementsprechend wäre es wünschenswert, dem Ingenieur ein Werkzeug in die Hand zu gegeben, derartige Beanspruchungssituationen rechnerisch erfassen zu können.

Das Ergebnis der theoretischen Berechnung, dass auch bei Balken mit Schlankheiten $n > 10$ noch ca. 35 % der Last über Bogentragwirkung abgetragen werden, ist zwar nicht ganz plausibel, man muss hier jedoch beachten, dass in der Berechnung der Formänderungsarbeiten von einem Querschnitt im Zustand I ausgegangen wird. Tatsächlich werden sich bei solchen Schlankheiten jedoch sicherlich Risse aus der Zugbandwirkung und der Biegebeanspruchung bilden, die die Frage aufwerfen, ob sich die betrachteten Druckgewölbe überhaupt noch einstellen können.

Literatur

[1] Rojek, R.: Zum Tragverhalten von Stahlbetontragwerken ohne Stegbewehrung im Bereich frei drehbarer Endauflager.
Forschungsbericht 2009 der Hochschule Augsburg.

[2] DIN 1045-1, Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton;
Teil 1: Bemessung und Konstruktion; Ausgabe Juli 2001.

[3] Leonhardt, F. und Walther, R.: Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung.
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 151, Berlin 1962.